Funkcionális modellek a tőszám és termés közötti összefüggés értelmezésére

Írta
Dr. Huzsvai László

Debrecen
2006

Tartalomjegyzék

Elméleti bevezetés

A tőszám és termés közötti összefüggéseket különböző egyenletekkel jellemezhetjük. Először is azt kell tudni, hogy az általunk vizsgált termés milyen biológiai tulajdonsággal rendelkezik, milyen termés/tőszám egyenlettel lehet leírni azt. A biológiai sajátosságok szerint HOLLIDAY (1960b) két osztályt különböztetett meg. Az egyik az aszimptotikus, melynél a tőszám emelkedésével az egységnyi területre vetített termés a maximális értékig nő, s ezután, nagy állománysűrűség mellett viszonylag állandó marad. Az un. konstans termés elmélete erre a tartományra érvényes. A másik parabolikus természetű, melynél a maximum elérése után, magas tőszám mellett az egységnyi területre vetített termés csökken. Ezt az osztályozást napjainkban is jónak tartják. Az aszimptotikus és parabolikus fogalmak azonban nem jelentenek egzakt matematikai leírást. Sokszor felvetődött az a kérdés, hogy a fenti két összefüggés nem ugyanazon jelenség két különböző mértékű kifejeződése. A vizsgálatok azt mutatják, hogy a két jelenség igenis létezik és külön érdemes őket kezelni. Sok termés/tőszám egyenlet vagy egy aszimptotikus, vagy egy parabolikus összefüggést jellemez, de nem mindkettőt, ezért matematikailag is érdemes elkülöníteni őket.

1. Az aszimptotikus összefüggés

HOLLIDAY (1960b) szerint az össz.szárazanyag alakulása ezt az összefüggést követi, de később több kutató (de BIT, 1959; BLEASDALE, 1966a; BRUINSMA, 1966; CAMPBELL és VIETS, 1967; FARAZDAGHI, 1968) rámutatott, hogy nagy állománysűrűség mellett a szárazanyagban kifejezett egységnyi területre vetített termésben is csökkenés következhet be. Gyakorlati szempontból azonban célszerû elfogadni, hogy a szárazanyagban kifejezett egységnyi területre vetített termés leggyakrabban aszimptotikus alakulást mutat. Pl. takarmány repce (HOLLIDAY, 1960a)

HOLLIDAY (1960b) rámutatott arra, hogy gyakran a vegetatív növényi rész és a tőszám között aszimptotikus összefüggést találunk. Természetesen kivételek is vannak.

2. A parabolikus összefüggés

HOLLIDAY (1960b) szerint ott, ahol a termés reproduktív rész (szemtermés, mag), az egységnyi területre vetített termés és a tőszám között parabolikus összefüggést találunk.

Pl. kukorica (LANG et al, 1956)

árpa (WILLEY, 1965)

A kukorica a parabolikus összefüggés extrém formáját képviseli, mert nagy állománysűrűségnél határozott terméscsökkenés tapasztalható. Az árpánál is hasonló a helyzet, bizonyos tőszám felett a parabola leszálló ága a vízszinteshez közelít. A cékla gyökértermése szintén parabolikusan változik az állománysűrűség függvényében. Parabolikus összefüggés mutatkozik az olyan növényeknél is, ahol a termést osztályozzák, pl. zöldségnövények. Az összes gyökértermés aszimptotikus összefüggést mutat, de az osztályozás parabolikus összefüggést teremt. Minél szigorúbb az osztályozás annál határozottabb a parabolikus jelleg. Meg kell jegyezni azonban, hogy ebben az esetben nem biológiai termésről van szó.

Termés/tőszám egyenletek

Az alábbiakban a termés és tőszám közötti összefüggés leírására alkalmas matematikai egyenletekkel foglalkozunk. A termés fogalma nem egyértelmű. Beszélhetünk egységnyi területre vetített termésről és egyedi produkcióról, pontosabban az egy növényre eső átlagtermésről. Az egyenleteket megkülönböztethetjük a szerint is, hogy melyik termés közötti összefüggést próbálják leírni. Az időbeli sorrendet figyelembe véve próbálkoztak polinom, exponenciális, Mitscherlich-féle, geometriai és reciprok egyenletekkel. A továbbiakban az egyes egyenletek tulajdonságait és használhatóságát tárgyaljuk.

1. Polinom egyenletek

Jellemzésük:

- Az egységnyi területre jutó termés és a tőszám közötti összefüggést vizsgálják. Egyszerűek. Ezeknek az egyenleteknek napjainkban nincs jelentőségük, mert nincs biológiai validitásuk.

HUDSON (1941) javasolt egyenlete búzára

$Y=a+bp+cp^2$ (1)

Ahol Y = egységnyi területre jutó termés (kg/ha)

p = tőszám (pl. ezer/ha)

- b és c (negatív) konstansok
- a termés/tőszám görbe szimmetrikus
- parabolikus összefüggés leírására csak akkor alkalmas, ha az összefüggés elég szimmetrikus
- nem alkalmas aszimptotikus összefüggés leírására
- nem pontos, nagy tőszámnál a termés hirtelen nullára csökken, ez a legnagyobb hibája
- a nulla tőszámhoz is tartozik termés, ha az a-együtthatót is alkalmazzuk, de el is hagyhatjuk

SHARPE és DENT (1968) egy négyzetgyökös formulát javasoltak

$Y=a+bp+cp^{-2}$ (2)

- a, b (negatív) és c konstansok
- ez sem alkalmas aszimptotikus összefüggés leírására
- nagy tőszámnál fokozatosabb terméscsökkenés, mint a négyzetesnél
- itt is van termés a nulla tőszámnál
- nagy tőszámnál itt is nulla termést kapunk
- hiányzik a biológiai validitás!

2. Exponenciális egyenletek

DUNCAN (1958) kukoricára javasolta az alábbi formulát

$\log w = \log K + bp$ (3)

ahol: w = az egy növényre eső termés (g)

p = tőszám (ezer/ha)

a (3) egyenlet nem más, mint $w = K10^{bp}$

- az egy növényre eső termés és a tőszám közötti összefüggést írja le
- K és b(negatív) konstansok
- lineáris regresszióval kiszámolható

Az egységnyi területre vetített termést a tőszámmal szorozva az alábbi egyenlet adja meg

$Y = pK10^{bp}$ (4)

CARMER és JACKOBS (1965) az előzővel analóg egyenletet javasolt

$Y = pAK^{p}$

- az exponenciális egyenletekkel a parabolikus összefüggések jól jellemezhetők az aszimptotikusak viszont nem
- előnyei a polinom egyenletekkel szemben, hogy nagy tőszámnál a görbe nem metszi a vízszintes tengelyt és a görbe átmegy az origón
- hibája, ami érvényes a többi termés/tőszám egyenletre is, hogy alacsony állománysűrűségnél, ahol még nincs verseny az egyes növények között, az egy növényre eső termés nem mutat állandóságot

DUNCAN arra is rámutatott, hogy az általa javasolt egyenlet lineáris regresszión alapul és így már két tőszámhoz tartozó termésadatból a teljes termés/tőszám görbe megszerkeszthető. Ezért azt javasolta, hogy kukoricánál a tőszámmal kölcsönhatásban lévő tényezőket két tőszámnál érdemes megvizsgálni. Ezután egyenletének használata lehetővé tenné, hogy a különböző tényezőket a számított tőszám optimum és termésmaximum értékek alapján összehasonlítsuk. Ez a módszer más, lineáris regresszión alapuló, egyenleteknél is alkalmazható.

Feltételek:

- a használt egyenletnek pontosan le kell írnia a vizsgált termés/tőszám összefüggést
- minél távolabb esik egymástól a két tőszám, annál pontosabban lehet meghatározni a regressziós görbét
- biztonságosabb egy harmadik , közbeeső, tőszámot is megvizsgálni
- A fenti eljáráshoz megfelelő biológiai validitás tartozik.

3. A Mitscherlich egyenletek

Mitscherlich az egy növényre eső termés és egy adott nélkülözhetetlen növekedési faktor közötti összefüggést vizsgálta, miközben a többi tényezőt állandó értéken tartotta. Elméletéből az alábbi termés/tőszám egyenlet származott:

$w=W(1-e^{-Ks})$ (5) vagy $w=W(1-1/e^{KS})$

ahol: w = az egy növényre eső termés (g)

W = egy növényre eső maximális termés

s = az egy növényre eső tenyészterület

K = általános tenyészterület állandó, tenyészterület kihasználási tényező. Mennyi energia, víz és tápanyag van az adott helyen.

A Mitscherlich-féle egyenlet aszimptotikus termés/tőszám összefüggésekre vonatkozik.

KIRA et al (1954) a K értékének állandóságát vizsgálták herénél és babnál. Meghatározták az egy növény által elérhető maximális termés értékét (W). A vizsgálat azt mutatta, hogy a K-értékek az s-értékek növekedésével csökkentek, így nem tekinthetők konstansnak. Ez a tény megkérdőjelezi a Mitscherlich-féle egyenlet alkalmazhatóságát. A K-értékeiben tapasztalható változásból arra lehet következtetni, hogy a tőszám megváltoztatásával nem csak a tenyészterület, hanem más tényezők is megváltoznak pl. gyökerezési mélység. A K-értéke a maximális egyedi produkció önkényes csökkentésével stabilizálható, de ekkor a biológiai megalapozottság csökken.

A Mitscherlich-féle egyenlet előnye:

- alacsony tőszámnál, ahol nincs verseny, elméletileg jól jellemzi a termés/tőszám kapcsolatot. A legtöbb termés/tőszám görbe rendszerint képtelen erre.

Egyes szerzők (JARVIS (1962), NEDLER (1963)) jónak míg mások (DONALD (1951)) kevésbé alkalmazhatónak találtál a Mitscherlich-féle egyenletet.

4. Geometriai egyenletek

WARNE (1951), KIRA et al (1953) lineáris összefüggést feltételez az egy növényre eső termés logaritmusa és a tőszám logaritmusa között. WARNE (1951) gyökérzöldségeket vizsgált és lineáris összefüggést talált az egy növényre eső gyökértermés logaritmusa és a tőtávolság logaritmusa között állandó sortávolság mellett.

$\log w=\log A+b \log(s)$

vagy más formában

$w=A(s)^b$ (6)

- *A* és *b* konstansok, *s* az egy növényre eső tenyészterület

- Az egyenlet az egységnyi területre eső termésre átalakítva az alábbi

$Y=A(p)^{1-b}$

KIRA et al (1953) szójánál lineáris összefüggést találtak az egy növényre eső termés logaritmusa és a tőszám logaritmusa között.

$\log w + a \log p = \log K$

vagy

$wp^{a}=K$ (7)

a és *K* konstansok. Az *a*-értékét elnevezték kompetíció-áll.sűrűség indexnek.

A fenti két egyenlet (6) és (7) analóg, mivel *A* egyenlő *K*-val, és *b* egyenlő *a*-val.

Ezzel az egyenlet típussal csak olyan termés-tőszám kapcsolat írható le, ahol a termés a legmagasabb tőszámnál is emelkedik pl. here. Ahogy a görbe alakja, a nagy tőszámoknál, közeledik az aszimptotikushoz a regressziós egyenes egyre laposabb lesz és az a-értéke tart egyhez. Természetesen aszimptotikus alakulásnál az a-értékének egynek kell lennie, ami azt jelenti, hogy minden tőszámhoz ugyanakkora termés tartozik. A termés/tőszám görbéből egy vízszintes egyenes lesz.

$wp=K=Y$ (8)

A fentiek figyelembevétele alapján alkották meg a konstans végső termés törvényét (HOZUMI et al, 1956).

- ha a-értéke nagyobb, mint egy a termés a tőszám emelkedésével csökken.
- így elméletileg sem aszimptotikus sem parabolikus kapcsolat nem jellemezhető a geometrikus egyenletekkel. Aszimptotikus kapcsolat akkor lehetséges, ha a-értéke egynek a törtrésze.
- Az egyenlet paramétereit elemezve a szerzők különböző szakmai, agrotechnikai jellemzőket tudtak segítségükkel leírni.

WARNE szerint, ha nő a és b-értéke, annál jobban függ a növény fejlődése a rendelkezésre álló tenyészterülettől.

KIRA et al szerint, ha nő az a-értéke jobb az adott növény terület kihasználása.

Ha nő az un. "power" konstansok (a, b) értéke, akkor a növények között nagyobb mértékű a versengés, erőteljesebb a görbület a termés/tőszám görbén és ez hatékonyabb terület kihasználást jelent.

A geometriai egyenletek hibája, hogy alacsony tőszámnál, ahol még nincs versengés a növények között, nem tudják leírni az egyedi produkcióban tapasztalható állandóságot. Ugyanez vonatkozik az exponenciális és a későbbiekben ismertetésre kerülő reciprok egyenletekre is.

5. Reciprok egyenletek

A reciprok egyenletek a növényenkénti átlagtermés és a tőszám közötti matematikai összefüggésen alapulnak. Napjainkban ezek jellemzik legjobban a termés/tőszám kapcsolatot.

SHINOZAKI és KIRA (1956) egyenlete a "konstans végső termés" törvényéből a következő formula szerint alakul:

$1/w=a+bp$ (9), vagy $w = 1/(a+bp)$

ahol: p = állománysűrűség (ezer/ha)

w = az egy növényre jutó termés (g)

Az *a* és *b*-értékek konstansok. Lineáris összefüggés van az egyedi produkció reciproka és a tőszám között. Számos aszimptotikus termés/tőszám szituációra kipróbálták az egyenletet és jónak bizonyult. Sajnos ez a formula nem alkalmas a parabolikus kapcsolat jellemzésére.

HOLLIDAY (1960b) kísérleti adatok alapján szintén ugyanezt az egyenletet találta jónak az aszimptotikus kapcsolat leírásánál (repce, burgonya, évelő perje). Holliday rámutatott arra, hogy egyenlete nem alkalmas az alacsony tőszámnál tapasztalható állandó egyedi produkció leírására, ezért bevezette "nulla" tőszámhoz tartozó növényenkénti átlagtermés fogalmát.

$A=1/a$

Javasolta, hogy pontosabb lenne egy olyan formula, mely annál a tőszámnál kezdődik, ahol a növényenkénti kompetíció először jelentkezik. Ha ez a tőszám n, és m=p-n, akkor az alábbi egyenlet adódik:

$1/w=a''+bm$ (10)

Az *a"* reciproka nem egyenlő a tényleges maximális növényenkénti terméssel, A"-val.

Ezt a formulát csak korlátozottan lehetne a gyakorlatban alkalmazni, mivel az A"-értékét kísérleti úton kellene meghatározni. A meghatározás elég körülményes lenne.

SHINOZAKI és KIRA (1956) egy másik egyenletet javasol az alacsony tőszámnál tapasztalható verseny nélküli szituáció leírására:

$1/w=a+b(p+\delta)$ (11)

- nagy tőszámnál a δ elhanyagolható
- alacsony tőszámnál használni kell ez biztosítja a viszonylag konstans termést
- sajnos a δ-nak nincs semmiféle biológiai jelentése, és esetleg csak kísérleti úton lehetne meghatározni az értékét.

HOLLIDAY (1960b) a parabolikus kapcsolatok jellemzésére a következő egyenletet javasolta:

$1/w=a+bp+cp^2$ (12), vagy $w = 1/(a + bp +cp^2)$

- ez egy másodfokú formula, amely linearizálható
- az egy növényre eső termés reciproka és a tőszám közötti kapcsolat nem lineáris
- jobb, mint a HUDSON (1941) által javasolt egyenlet
- a görbe itt nem szimmetrikus, és nagy tőszámnál a valóságnak megfelelő a parabola leszálló ága

DE WIT (1958) árpával és zabbal kísérletezett és lineáris összefüggést talált a területegységre eső termés reciproka és a sortávolság között, állandó tőtávolság mellett. Az összefüggést az alábbi formula jellemzi:

1/Y=a+b*sortáv (13)

Később DE WIT (1960) lineáris összefüggést talált a terület egységre eső termés reciproka és a tenyészterület (s) között.

1/Y=1/P+s/PQ (14)

az 1/Y nem más, mint az egységnyi tömegű termés előállításához szükséges terület nagysága.

P és Q konstansok

- a regressziós egyenes az 1/P és Q pontoknál metszi a függőleges ill. vízszintes tengelyt. Ezért P az egységnyi területre vetített termés aszimptotája.
- a fenti összefüggés lineáris és pozitív, a tenyészterület növekedésével nő az egységnyi területre vetített termés reciproka

A 14. egyenlet így is felírható:

Y=PQ/(Q+S)

A fenti egyenletet a tőszámmal osztva és reciprokát képezve kapjuk a

1/w=1/PQ+p*1/P (15)

formájú egyenletet.

Ez a formula abban különbözik a (9) és (10) egyenletektől, hogy a 0 tőszámhoz tartozó 1/w értéket két konstans határozza meg, az egyik ezek közül a P. A fenti egyenlet is csak aszimptotikus termés/tőszám kapcsolat leírására alkalmas.

BLEASDALE és NELDER (1960) új formájú egyenletet javasolt

$1/w^{\theta}=a+bp^{\theta}$ (16)

- alakú egyenletben az *a, b* és *θ* konstansok és aszimptotikus kapcsolatot írnak le
- ha *p* hatványa nagyobb, mint a *w*-é, akkor parabolikus összefüggést is leírhat. Ennek megfelelően átalakítva a (16) egyenletet

$1/w^{\theta}=a+bp^{\phi}$ (17)

alakút kapunk.

- ahol a termés aszimptotikus alakulást mutat $\theta=\phi$
- ahol pedig parabolikus θ nem egyenlő ϕ-vel.

A két konstans egymáshoz viszonyított arányát fontos ismerni. A gyakorlatban viszont elég az egyik értéket meghatározni, ezért a fenti egyenletet BLEASDALE egyszerűsítette és az alábbi formulát javasolta:

$1/w^{\theta}=a+dp$ (18)

FARAZDAGHI és HARRIS (1968) a konstans végső termés törvényét az alábbiak szerint módosították:

$wp^{\gamma}=K$ (19)

a fenti összefüggést felhasználva kapták a

$1/w=a+bp^{\gamma}$ (20)

alakú egyenletet

ez az egyenlet aszimptotikus és parabolikus összefüggést is jellemezhet a γ értékétől függően:

aszimptotikus $\gamma=1$
parabolikus $\gamma>1$

A reciprok egyenletek további magyarázata

Csak a reciprok egyenletekkel lehet mindkét (aszimptotikus és parabolikus) termés/tőszám kapcsolatot leírni. Biológiailag megalapozottak, a legelterjedtebben használt modellek.

A reciprok egyenletek biológiai validitása a növényi növekedés egyszerű logikai görbéjéből adódik. A biológia deriválás fogalmával SHINOZAKI és KIRA (1956), BLEASDALE és NEDLER (1960), FARAZDAGHI és HARRIS (1968) foglalkoztak. A növényi növekedés az alábbi egyszerű görbével írható le:

$$\frac{1}{w} * \frac{dw}{dt} = \lambda\left(1 - \frac{w}{W}\right) \qquad (21)$$

ahol w a növény t időbeli tömege, a λ a növekedési koefficiens

W és λ konstansok és függetlenek az időtől

A (21) függvényt integrálva meg kaphatjuk, hogy w (az átlagos egyedi produkció) mitől függ.

$w=W/(1+ke^{-\lambda t})$

A fenti egyenlet független a tőszámtól. A konstans végső termés elméleténél a végső egységnyi területre eső termés is független a tőszámtól. A két egyenletet a (8) és (21) összekombinálva a nulla időpontnál, amikor a növény tömege w0 a (9) egyenletet kapjuk.

$$\frac{1}{w} = a + bp \qquad (9)$$

ahol

$$a = \frac{e^{-\lambda t}}{w_0} \qquad \text{és } b = \frac{1 - e^{-\lambda t}}{Y}$$

A (9) egyenletet kifejezhetjük az egységnyi területre jutó termésben is

$$Y = \frac{p}{a + pb}$$

Ahogy a tőszám nő, az Y közelít az 1/b-hez, vagyis az egységnyi területre eső termés aszimptotája egyenlő 1/b-vel. Az a és b értéke utal az adott környezet potenciáljára. Az a-értéke utal a genetikai potenciálra is. Ha a tőszám hatását a termés alakulására a vegetációs időben folyamatosan vizsgáljuk, azt tapasztaljuk, hogy a konstansok értéke a növényfejlődése során változik. A konstansok értékeinek vizsgálatát SHINOZAKI és KIRA (1956) szójánál, JONES (1968) babnál végezte el.

Megállapították, hogy b-értéke a csírázás után gyorsan nőtt és ezt a kompetíció nélküli állapottal magyarázták. JONES (1968) vizsgálatai alapján azt találta, hogy a-értéke a vegetációs időszak előrehaladtával egyre csökken.

REESTMAN és DE WIT (1959) a 14. egyenletben szereplő P és Q értékét a fejlődés előrehaladtával növekvőnek találták, ami cukorrépa esetében egy állandó értékhez közelített. BLEASDALE és munkatársai a fajta és a környezet *a* és *b-értékre* gyakorolt hatását vizsgálták. 1996-ban három hagyma fajtát vizsgáltak és azt találták, hogy *a-értéke* függ a fajtától, *b-értéke* a talajtermékenységétől. Az *a-értéke* egy adott fajtára az évjárattól függetlenül állandó értéket mutatott. BLEASDALE és THOMPSON (1966) a fenti kísérletet pasztinákkal is megismételte és ugyanarra az eredményre jutott. WILLEY (1965) búzával végzett kísérletei alapján az *a-értéket* konstansnak, *b-értékét* a környezet hatására változónak találta. Végezetül megjegyzendő, hogy a fenti konstansokat részletesebben kellene megvizsgálni ahhoz, hogy egzakt biológiai jelentést tulajdonítsunk nekik.

Regresszióanalízis és az illeszkedés pontossága

Ebben a fejezetben először a termés/tőszám matematikai illesztésének általános kérdését tárgyaljuk. Ezt követően részletesen szólunk a reciprok egyenletek illesztéséről és az illesztés pontosságáról. Először is azt kell átgondolni, hogy miért akarjuk a regresszióanalízist alkalmazni. Ha a szándékunk csak az, hogy egy adathalmazra görbét illesszünk, az elemzést területegységre eső termés/tőszám adatok alapján is kielégítően végre lehet hajtani. A tényleges termés/tőszám összefüggés azonban az egy növényre eső termés és tőszám adatokon végrehajtott regresszióval sokkal jobban leírható.

A különböző egyenletek alkalmazása esetén néha nem sok különbség adódik a magasabb tőszámoknál, de az alacsony tőszámnál az összefüggést jobban leírja egy biológiai validitással rendelkező függvény. A fenti függvények illesztésekor rendszerint a legkisebb négyzetek szerinti regresszióanalízist alkalmazzák. (A megfigyelt és becsült y-értékek különbségének négyzetösszegét minimalizálják) Az aszimptotikus összefüggést leíró egyenleteket vissza lehet vezetni lineáris egyenletté és egyszerű lineáris regresszióval lehet elvégezni az illesztést. A parabolikus összefüggések leírásakor bevezetett hatványos tagok bonyolultabbá teszik a regresszióanalízist. A legkisebb négyzetek elve szerinti regresszióanalízis feltétele, hogy a termés adatok normális eloszlásúak és varianciájuk minden tőszámot figyelembe véve konstans legyen. Függetlenül attól, hogy területegységre vagy egy növényre eső termésről van szó. A fenti feltételeket több szerző is vizsgálta. KELLER és LI (1949) komló kísérletben, korlátozott tőszám intervallum mellett, a fenti feltételek teljesülését tapasztalták.

HOZUMI et al (1956) répa és pasztinák kísérletben három tőszám mellett vizsgálták az egy növényre eső termést és azt tapasztalták, hogy a szórás a növények méretének növekedésével vagyis a tőszám csökkenésével növekszik.

NEDLER (1963) kritizálta JARVIS (1962) lucerna adatokra illesztett görbéjét és kétségbe vonta, hogy az egy növényre eső termés varianciája konstans minden tőszámnál. Véleménye szerint pontosabb, ha az egy növényre eső termés logaritmusának varianciáját vesszük állandónak. Ezt a feltételt alkalmazták BLEASDALE és munkatársai is. Ez a feltétel azonban a legkisebb négyzetek elvén alapuló regresszió egy bonyolultabb alkalmazását vonja maga után. A reciprok egyenletek illeszkedés pontosságának vizsgálatakor a hangsúly a parabolikus termés/tőszám szituáción van, mivel aszimptotikus összefüggés esetén mindegyik egyenlet hasonlóan jól írja le a helyzetet. A tudományos munka során csak biológiai validitással rendelkező egyenletet válasszunk, amit esetleg egy empirikus egyenlettel pl. a (12) egyenlettel szükség esetén össze is hasonlíthatunk. A biológiai validitással rendelkező egyenletek közül BLEASDALE ((18) egyenlet) és FARAZDAGHI és HARRIS (1968) egyenletét javasoljuk. BLEASDALE egyenletének illesztésekor a feltétel, hogy $\log(w^{-\theta})$ varianciája állandó. Az *a* és *b* konstansok becslésére súlyozott regresszió-analízist kell alkalmazni. Az illeszkedés pontosságára vonatkozó kritériumot módosítani kell és NEDLER (1963) és MEAD ajánlása szerint a legjobb θ-értéket az (eltérés négyzetösszeg)/θ^2 minimalizálásával végzett regresszió-analízis adja.

Ha a fenti feltételekkel nem lehet a minimumot egyértelműen meghatározni, akkor a bonyolultabb $\log(w^{-\theta})$-val történő regressziót kell használni a legkisebb négyzetek elvének megfelelően. Ilyenkor a Holliday-féle egyenlet használata praktikusabb.

Következtetések

A termés/tőszám kapcsolatok jellemzésére azokat az egyenleteket célszerű használni, amelyek biológiailag megalapozottak.

Napjainkban erre a reciprok egyenletek a legjobbak. A parabolikus kapcsolatok leírására kevésbé biztosan használhatók, de erre az esetre is rendelkezésre áll három, nagyon flexibilis, kielégítően alkalmazható egyenlet ((12), (18), (20) egyenlet).

A reciprok egyenletek biológiai jelentést tulajdonított állandóit további vizsgálat alá célszerű vonni.

Gyakorlati példa

A gyakorlati oktatás során három kukorica hibrid szemtermés és tőszám összefüggését dolgozzuk fel. Azért döntöttük a kukorica mellett, mert ez a parabolikus összefüggés extrém esetét mutatja, így egyetlen növény esetében a fellépő összes problémát, és esetleges megoldását be tudjuk mutatni. A kísérlet leírását az alábbiakban adjuk meg.

Négy esztendőben, 1989-1992, három genotípusnál, Dekalb 524, Pannónia SC és Volga SC vizsgáltuk a kukorica szemtermés nagyságának alakulását a tőszám függvényében. Kísérletünkben a tőszám kezelésszintjeit (60, 70, 80, 90 ezer tő/ha) úgy választottuk meg, hogy megfeleljenek a növénytermesztők (farmerek) által a gyakorlatban alkalmazott tőszámoknak.

Kísérletünknek kettős célja volt egyrészt vizsgálni, hogy a gyakorlatban alkalmazott tőszámok megfelelőek-e, másrészt adataink alkalmasak-e a tőszám és a termés összefüggésének meghatározására.

Mint ismeretes a tőszám függvényében az egységnyi területre vetített kukorica szemtermés parabolikus összefüggést mutat. Az általunk vizsgált négy esztendőben is többnyire ezt kaptuk. Az 1990. és főleg az 1992. év a nagy szárazság miatt ebből a szempontból rendhagyó volt, mivel az általunk vizsgált tőszámtartománynál az egységnyi területre vetített termés a tőszám növelésével drasztikusan csökkent.

Az egységnyi területre vetített termés az egyedi produkció és a tőszám szorzata.

$Y=pw$

Y= egységnyi területre vetített termés (kg/ha)

p= tőszám (ezer növény/ha)

w= egyedi produkció (kg/növény)

A fenti összefüggés miatt nem az egységnyi területre vetített termés, hanem az egyedi produkció és a tőszám közötti kapcsolatot elemeztük.

Az összefüggés tisztázását két egyenlet felhasználásával próbáltuk meg. Az első egy lineáris egyenlet, a második Farazdaghi és Harris (1968) biológiai validitással rendelkező reciprok egyenlete volt.

A lineáris egyenletet azzal a feltételezéssel választottuk, hogy az általunk vizsgált tőszámtartományban az egyedi produkció lineárisan csökken a tőszám növelésekor. Ezt a feltételezést csak erre a tőszámtartományra tartjuk megengedhetőnek, és az extrapolációt határozottan visszautasítjuk. Az 1. táblázat adatai azt mutatják, hogy jól lehet közelíteni ezzel a függvénnyel.

1. táblázat

1989.

Hibrid	R	a	b
DEKALB 524			
a+bp	0.8419	195	-0.983
$1/(a+bp^2)$	0.8194	5.57	0.4864E-03
PANNONIA SC			
a+bp	0.9387	248	-1.68
$1/(a+bp^2)$	0.9345	3.85	0.7874E-03
VOLGA SC			
a+bp	0.9825	283	-2.25
$1/(a+bp^2)$	0.9797	2.24	0.1214E-02

1990.

Hibrid	R	a	b
DEKALB 524			
a+bp	0.9079	188	-1.439
$1/(a+bp^2)$	0.9071	4.00	0.1575E-02
PANNONIA SC			
a+bp	0.9493	177	-1.500
$1/(a+bp^2)$	0.9298	1.09 +	0.2732E-02
VOLGA SC			
a+bp	0.8980	200	-1.55
$1/(a+bp^2)$	0.9086	4.27	0.1435E-02

1991.

Hibrid	R	a	b
DEKALB 524			
a+bp	0.7859	264	-1.7099
$1/(a+bp^2)$	0.7375	3.77	0.6721E-03
PANNONIA SC			
a+bp	0.7885	299	-2.315
$1/(a+bp^2)$	0.7438	2.64	0.1030E-02
VOLGA SC			
a+bp	0.9183	313	-2.300
$1/(a+bp^2)$	0.8211	2.13	0.9933E-03

1992.

Hibrid	R	a	b
DEKALB 524			
a+bp	0.8257	128	-1.025
$1/(a+bp^2)$	0.8083	5.72	0.2692E-02
PANNONIA SC			
a+bp	0.8904	138	-1.127
$1/(a+bp^2)$	0.8131	3.2794	0.2955E-02
VOLGA SC			
a+bp	0.9078	152	-1.365
$1/(a+bp^2)$	?	?	?

A paraméterek elemzése során megállapítható, hogy *a-értéke* csak pozitív, *b-értéke* csak negatív lehet. Az *a-értéke* a további elemzés során nem használható. Nem alkalmas arra, hogy az $x \rightarrow 0$ helyen, a kompetíció nélküli állapotot szimulálva, a maximális egyedi produkciót megmutassa. Nem engedjük meg az extrapolációt egyik irányban sem.

A *b* paraméter , az általunk vizsgált tőszámtartományban megmutatja, hogy egységnyi tőszám növelésre milyen mértékű egyedi produkció csökkenést kapunk.

A négyéves vizsgálatok azt mutatták, hogy *b* értéke évenként és genotípusonként változott. Kedvező évjáratban genotípusonként nagy volt a különbség. Kedvezőtlen években, ahol a nagymérvű vízhiány miatt alacsony volt a termés, ez az érték közel egyformának adódott mindhárom genotípusnál.

A fenti modell segítségével az egységnyi területre vetített termés az alábbi egyenlettel írható le:

Y=wp és, ha w = a –bp, akkor

$Y=ap-bp^2$

A reciprok egyenlet az alábbi alakú volt:

$$w=\frac{1}{a+bp^{\gamma}}$$

A reciprok egyenletek néhány általános tulajdonságának ismertetése a mellékletben található.

Farazdaghi és Harris egyenlete

A regresszió-analízis során a legkisebb négyzetek elvét használtuk az illesztés jóságának elbírálására. A γ-értéke a négy év során változott. A négy évet együtt vizsgálva a γ=2 érték adta a legjobb közelítést. Ezért a továbbiakban a

$$w=\frac{1}{a+bp^{2}}$$

függvényt használtuk.

Ennek a függvénynek a tulajdonsága, hogy nincs függőleges aszimptotája, ha *a* és *b*-értéke pozitív előjelű. Vízszintes aszimptotája nulla és az *1/a* helyen metszi az y-tengelyt.

A területegységre vetített termés/tőszám összefüggés így írható le a fenti függvény segítségével.

$$wp=\frac{p}{a+bp^{2}}$$

Ennek a függvénynek x=0 helyen nullpontja van. Függőleges aszimptotája nincs és a vízszintes aszimptotája nulla.

Ezekből a függvényekből már extrapolációra is vállalkozhatunk, ha nem is nagy biztonsággal. A bizonytalanságot az általunk alkalmazott szűk tőszámtartomány okozza. A kompetíció nélküli állapotban az egyedi termés az *1/a* értéket közelíti.

Ha kíváncsiak vagyunk arra, hogy a tőszám egységnyi növelése milyen változást okoz az egyedi termés alakulásában, akkor a függvényt deriválni kell.

$$\frac{\delta w}{\delta x} = -\frac{2bx}{\left(a + bx^2\right)^2}$$

A két száraz esztendőben 1990. és 1992. az analízis során probléma adódott. 1990-ben a Pannóniánál 1992-ben a Volgánál nem értelmezhető eredményt kaptunk. Az ok, hogy ezekben az esztendőkben a szárazság miatt az általunk vizsgált tőszám intervallumban a tőszám növelésével drasztikusan csökkent az egységnyi területre vetített termés.

Az 1/a ábra egy átlagos, jellemző kapcsolatot mutat a tőszám és termés között. Az Y=ap-bp2 egyenlet szimmetrikusnak mutatja a termés növekedését ill. csökkenését.

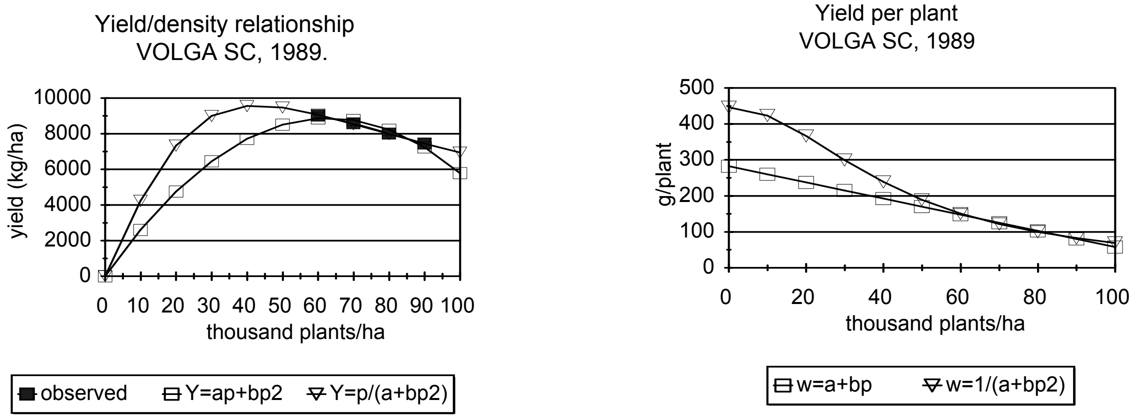
Az Y=$\frac{p}{a + bp^2}$ egyenlet a valósághoz jobban közelít. A kis tőszám intervallumban csaknem lineáris növekedést mutat. Negyven ezres tőszám után fokozatos csökkenés tapasztalható a termésben. Az egyedi produkció alakulását az 1/b ábra mutatja. Lineáris függvénnyel közelítve nem vállalkozhatunk extrapolációra. A reciprokos közelítés információt adhat a kompetíció nélküli, maximális egyedi produkcióra.

Az 1/a-értéke természetesen nem esik egybe a lineáris függvény a-paraméterével. A két érték többnyire eltér egymástól, de van olyan esztendő, ahol majdnem teljesen megegyezik ez a két érték, pl. 1989-ben a Dekalb 524 és Pannónia SC esetében.

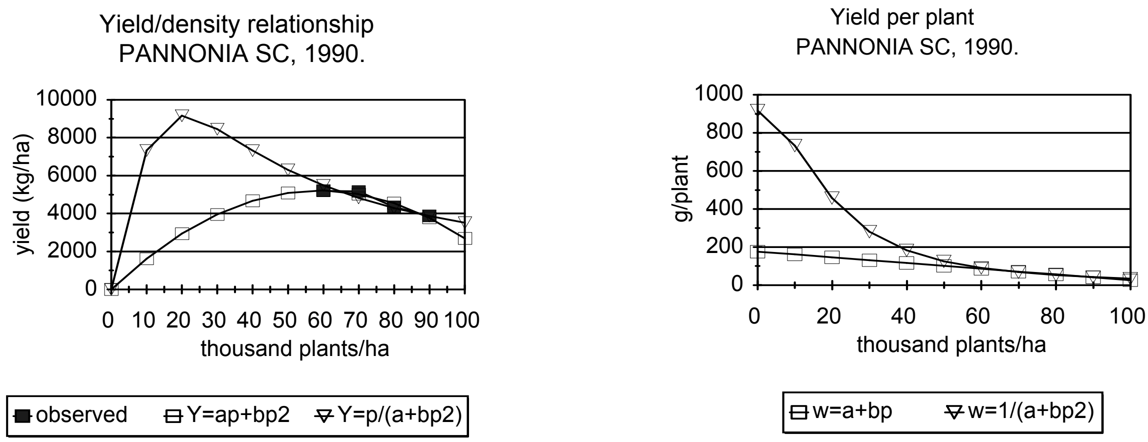
A 2/a és b ábra egy rendhagyó eredményt mutat, ami a szűk tőszám intervallumnak köszönhető. A reciprok egyenlet alapján a maximális egyedi produkció, 2/b ábra olyan magasnak adódik, hogy szakmailag nem lehet elfogadni.

A 3/a és b ábrák szintén rendhagyó eredményt mutatnak be. 1992-ben annyira aszályos volt az időjárás, hogy a vizsgált tőszámtartományban drasztikus egységnyi területre vetített terméscsökkenés következett be a tőszám növekedésekor. A reciprok egyenlet szakmailag nem értelmezhető eredményt adott. Ez az eredmény nem a reciprok egyenletek használhatatlansága, hanem a rosszul megválasztott tőszám intervallumnak volt köszönhető.

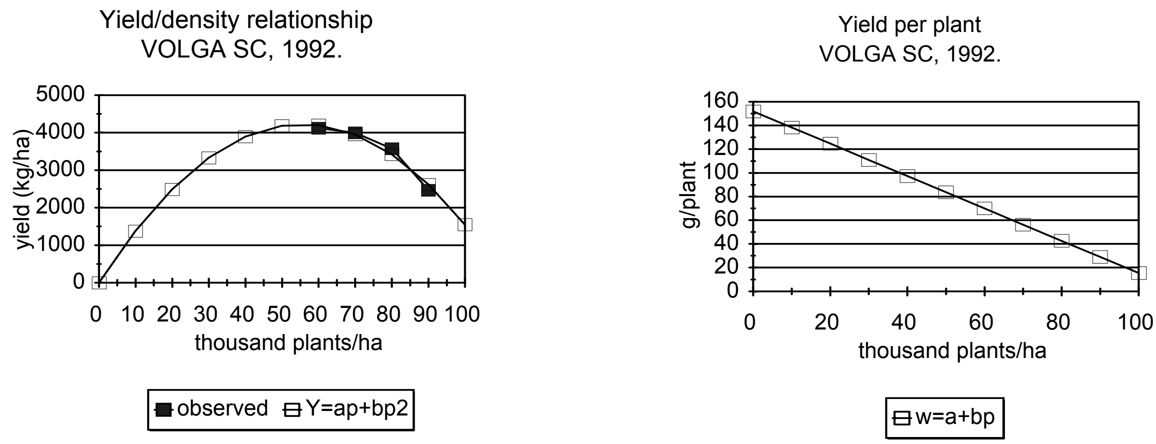
1/a és b ábra



2/a és b ábra



3/a és b ábra



Összefoglalás

Négy éven keresztül vizsgáltunk három genotípusba tartozó kukorica hibrid tőszám és termés közötti kapcsolatát. A vizsgált tőszámtartomány 60-90 ezer tő/ha, a hibridek Dekalb 524, Pannónia és Volga volt. A probléma megközelítése az egyedi produkció és tőszám közötti kapcsolat vizsgálatát követeli meg. Két modellt választottunk egy lineáris és egy biológiai validitással rendelkező reciprok egyenletet, Farazdaghi és Harris (1968). Az utóbbi egyenletnél a γ=2 értéket használtuk egységesen a négy év alatt.

A négy év vizsgálatai azt mutatták, hogy a lineáris közelítés jól használható a vizsgált szűk tőszámtartományban. A közelítés jóságát az r-érték ill. a maradék négyzetösszegek nagyságával becsültük meg. A becsült paraméterek értékei az 1. táblázatban találhatók meg. A lineáris közelítésből extrapolációt nem szabad tenni, így ebből pl. a maximális egyedi produkciót sem szabad megbecsülni.

A reciprok egyenletek jól használhatók az egész tőszámtartományban. Hűen írják le az egyedi produkció és tőszám közötti kapcsolatot. Olyan esztendőkben amikor az általunk választott tőszám intervallum elegendően szélesnek bizonyult a tényleges hatás felderítésére (volt növekvő és csökkenő egységnyi területre vetített termés), ott extrapolációra is vállalkozhatunk.

Egyes esztendőkben, főként nagy szárazságban az általunk választott tőszám intervallum nem volt alkalmas tényleges hatás felderítésére és szakmailag nem értelmezhető eredményeket kaptunk. Ilyenkor a lineáris közelítés adott valamiféle eredményt, de valószínűleg nem sok köze lehet a valósághoz. A fenti eset is igazolja, hogy egy biológiai validitással rendelkező modell esetenként a rosszul megválasztott értelmezési tartomány miatt nem ad választ az általunk feltett kérdésre. Ilyenkor a kísérletünket módosítani kell!

Melléklet

A reciprok egyenletek általános alakjai

$$Y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

a függvény függőleges aszimptotája: $-\frac{d}{c}$

a függvény vízszintes aszimptotája: $\frac{a}{c}$

nullpontja van a függvénynek a $-\frac{b}{a}$ helyen, ha értelmezve van a függvény ezen a helyen.

Az egyedi produkció és tőszám közötti összefüggést leíró egyenletünk, ha aszimptotikus az összefüggés

$$Y = \frac{1}{a+bx}$$

alakú, függőleges aszimptotája egyenlő $-\frac{a}{b}$ -vel, vízszintes aszimptotája egyenlő nullával.

A hangsúly a továbbiakban a két konstans (a és b) előjelén van. Összesen négy kombináció létezik ezek közül viszont csak egy használható fel, az, amikor az a és b-értéke pozitív előjelű. Ha ettől eltérő előjeleket kapunk a vizsgálat során, akkor valamiféle hibát követtünk el.

A fenti összefüggést az egységnyi területre vetített termés/tőszám összefüggésre felírva

$$wp = \frac{p}{a+bp}$$

formájú összefüggést kapjuk. Függőleges aszimptotája egyenlő $-\frac{b}{a}$, vízszintes aszimptotája egyenlő $\frac{1}{b}$, nullpontja van az x = 0 helyen.